УДК 51-71, 532.51, 538.93
DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-8

В. М. Журавлев

О МНОГОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С УРАВНЕНИЯМИ ЛАПЛАСА И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ПОДСТАНОВКАМИ[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Рассматривается применение метода функциональных подстановок типа Коула – Хопфа к многомерным задачам динамики волн и гидромеханики. С помощью дополнительных преобразований строятся решения уравнения Лиувилля в двумерном координатном пространстве и анализируются отображения пространства решений этого уравнения в себя и в уравнение Лапласа.

Материалы и методы. Методом исследования рассматриваемых уравнений в данной работе является метод функциональных подстановок типа Коула – Хопфа. Данный метод позволяет, исходя из совокупности простых базовых дифференциальных соотношений относительно одной вспомогательной функции и дополнительного уравнения для нее, вычислять связанные с этим уравнением новые нелинейные уравнения, решения которых строятся в виде дифференциальных подстановок. Простейшим примером применения такого подхода является подстановка Коула – Хопфа для уравнения Бюргерса. Такой подход оказывается эффективным для целого ряда задач. В данной работе используется многомерное расширение метода функциональных подстановок, что позволяет получить ряд полезных результатов, касающихся динамики жидкости в трехмерном пространстве.

Результаты. Показано, что в двумерном пространстве существуют бесконечные рекуррентные цепочки преобразований уравнений Лапласа и Лиувилля в себя, связанные с возрастающим порядком производных одной исходной функцией, являющейся решением уравнения Лапласа. С помощью подстановок и отображений вычисляется форма нелинейных уравнений, связанных также с уравнением Гельмгольца в двумерном координатном пространстве. Рассматриваемый подход затем применяется к многомерным уравнениям теплопроводности и устанавливается связь решений этих уравнений с решениями многомерных уравнений вязкой сжимаемой и несжимаемой жидкости в классе потенциальных течений. Это позволяет указать способ вычисления точных решений уравнений Навье – Стокса на основе решений уравнений теплопроводности. В заключении рассматривается задача вычисления с помощью подстановок многомерных уравнений, связанных с уравнением теплопроводности и Лапласа. В работе показано, что такие уравнения можно свести к неоднородным уравнениям типа Лиувилля, неоднородность которых связана со свой-

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (в рамках Государственного задания и проекта № 14.Z50.31.0015) и грантов РФФИ 16-42-732119 р_офи_м и 16-42-732113 р_офи_м.

ствами полей единичных векторов на соответствующем координатном пространстве.

Выводы. Развитый в работе многомерный вариант метода функциональных подстановок позволяет получить полезные для прикладных задач соотношения, связывающие решения простых уравнений типа Лапласа, теплопроводности и Гельмгольца с нелинейными уравнениями, имеющими отношение к волновой динамике и гидромеханике. Полученные результаты расширяют область применения метода функциональных подстановок к задачам теоретической и математической физики.

Ключевые слова: точно интегрируемые нелинейные уравнения, обобщенные подстановки Коула – Хопфа, многомерные уравнения Лапласа, Навье – Стокса, Лиувилля.

V. M. Zhuravlev

ON MULTIDIMENSIONAL NONLINEAR EQUATIONS ASSOCIATED WITH LAPLACE AND HEAT CONDUCTION EQUATIONS BY MEANS OF FUNCTIONAL SUBSTITUTIONS

Abstract.

Background. The article considers the application of the method of functional substitutions of Cole-Hopf type to multidimensional problems of wave dynamics and hydromechanics. Using additional transformations, solutions to the Liouville equation are developed in a two-dimensional coordinate space while analyzing the selfmapping of the solution space and the mapping of the Laplace equation.

Materials and methods. A method of researching the equations under consideration is the method of functional substitutions of Cole-Hopf type. In terms of the aggregate of simple basic differential correlations of one auxiliary function and an additional equation for it, the given method enables to solve new nonlinear equations associated with the said equation, the solutions of which are developed in the form of differential substitutions. An elementary example of the given approach is a Cole-Hopf substitution for the Burgers equation. The given approach appears to be efficient for a series of problems. The present study uses multidimensional extension of the method of functional substitutions allowing to obtain a series of useful results concerning dynamics of liquid in 3D space.

Results. It is shown that in 2D space there exist infinite recurrent chains of self-transformations of Laplace and Liouville equations associated with an ascending order of derivatives of one initial function being a solution of the Laplace equation. The form of nonlinear equations associated as well with the Helmholtz equation in a 2D coordinate space is calculated using substitutions and mappings. Then, the approach under consideration is applied to multidimensional equations of heat conduction, and there is established a connection of solutions to the said equations with solutions of multidimensional equations for viscous compressible and incompressible fluids in the potential flow class. The above-said allows to specify a method for calculation of precise solutions of the Navier-Stokes equations on the basis of heat conduction equations' solutions. In conclusion, the article considers the problem of calculation using substitutions of multidimensional equations associated with Laplace and heat conduction equations. The work shows that such equations may be reduced to heterogeneous equations of Liouville type, the heterogeneity of which is associated with properties of unit vector fields in a corresponding coordinate space.

Conclusions. The multidimensional variant of the method of functional substitutions, developed in the work, makes it possible to obtain correlations useful for applied problems. Such correlations link solutions of sinple euqations of Laplace, heat conduction and Helmholtz types with nonlinear equations related to wave dynamics and hydromechanics. The results obtained expand the field of application of the method of functional substitutions for problems of the oretical and mathematical physics.

Key words: exactly integrable nonlinear equations, generalized Hopf-Cole substitution, multi-dimensional Laplace equation, Navier-Stokes equations, Liouville equation.

Введение

В работах [1–4] был предложен метод, позволяющий строить уравнения типа Бюргерса и их решения с помощью обобщенных подстановок Коула – Хопфа. Этот метод может быть применен к целому ряду прикладных задач, в частности, к задачам гидродинамики сжимаемой жидкости [2, 3], а также к задачам течений самогравитирующей среды [5, 6] и некоторым другим задачам [4].

Метод строится на основе анализа условий совместности некоторой базовой системы линейных уравнений. Однако, в отличие от метода обратной задачи, данный метод опирается не на сами условия совместности, а на дифференциальные следствия исходной системы уравнений. Как показано в [1–4], эту совокупность базовых дифференциальных соотношений всегда можно дополнить еще одним уравнением, замыкающим систему условий совместности до некоторого нелинейного уравнения типа Бюргерса. Свойства построенного таким образом уравнения типа Бюргерса определяются типом замыкающего уравнения. Например, полная интегрируемость построенного уравнения связана с интегрируемостью замыкающего уравнения, при этом последнее может и не быть линейным. Нелинейность замыкающего уравнения использовалась в работах [2, 3, 5, 6] для построения точных решений уравнений вязкой и идеальной сжимаемой жидкости.

В настоящей работе с помощью метода обобщенных подстановок Коула – Хопфа с новым набором базовых уравнений исследуются взаимосвязи решений уравнений Лапласа с решениями уравнений Навье – Стокса и уравнения Лиувилля в размерности 2. При этом вводятся различия между подстановками первого и второго уровня. Строится рекуррентная функциональная цепочка отображений решений уравнения Лапласа в решения того же уравнения Лапласа и Лиувилля, в том числе неоднородное уравнение Лиувилля. Показано, что существует бесконечно много таких отображений, отличающихся порядком производных, входящих в запись отображения. Далее в работе результаты применения подстановок первого и второго уровня переносятся на двумерное уравнение Гельмгольца, а затем и на многомерные уравнения теплопроводности, Лапласа и Гельмгольца.

1. Базовые соотношения первого порядка

Опираясь на результаты работ [1–4] в качестве исходной системы линейных уравнений, рассмотрим уравнения следующего вида:

$$T_x = AT,\ T_t = BT, \tag{1}$$

относительно одной вспомогательной комплексной функции $T(x,t)$, двух вещественных переменных x и t и двух структурных комплексных функций $A(x,t)$ и $B(x,t)$. Дифференцируя однократно первое уравнение по t, а втрое по x, получаем вместе с ними замкнутую однородную алгебраическую систему четырех уравнений относительно функции T и трех первых ее производных: T_x, T_t и T_{xt}. Условием совместности этой системы является структурное уравнение

$$A_t = B_x. \tag{2}$$

В силу этого все производные функции T можно выразить рекуррентно через функцию T или одну любую ее производную по формулам:

$$T^{[n,k]} = \frac{\partial^{n+k} T}{\partial x^n t^k} = A^{[n,k]} T,$$

где

$$A^{[n+1,k]} = A_x^{[n,k]} + A^{[n,k]} A, \; A^{[n,k+1]} = A_t^{[n,k]} + A^{[n,k]} B, \tag{3}$$

и

$$A^{[1,0]} = A, \; A^{[0,1]} = B.$$

К базовой системе (1) можно добавить произвольное уравнение для T, которое в итоге с помощью соотношений (3) превращается в нелинейное уравнение, относительно функций A, B. При этом это уравнение образует замкнутую систему вместе с уравнением (2). В этом случае базовые соотношения (1) можно рассматривать как обобщенные подстановки Коула – Хопфа. Эти подстановки будем называть подстановками первого уровня.

2. Уравнение Лапласа и уравнения гидродинамики

Рассмотрим в качестве замыкающего уравнения для функции T уравнение Лапласа:

$$T_{xx} + T_{yy} = 0. \tag{4}$$

Используя дифференциальные следствия соотношений (1), находим связь между функциями A и B:

$$A_x + A_y + A^2 + B^2 = 0, \quad A_y = B_x. \tag{5}$$

Система этих уравнений имеет точные решения, которые строятся с помощью обобщенных подстановок Коула – Хопфа (1).

Наиболее простая интерпретация этих уравнений состоит в их связи со стационарными уравнениями Навье – Стокса двумерных потенциальных течений однородной и неоднородной жидкости. Полагая

$$v = -2\nu A = -2\nu \frac{T_x}{T}, \; w = -2\nu B = -2\nu \frac{T_y}{T}, \tag{6}$$

где u, v – компоненты вектора скорости потока жидкости, и дифференцируя первое уравнение в (5) отдельно по x и y, а также используя второе, приходим к паре уравнений:

$$vv_x + wv_y = \nu\Delta v, \quad vw_x + ww_y = \nu\Delta w. \tag{7}$$

Это и есть стационарные уравнения Навье – Стокса с кинематической вязкостью ν. Для того чтобы в такой модели выполнялся закон сохранения массы, в качестве плотности среды ρ следует выбрать функцию $\rho = T(x, y)$. Действительно, в этом случае уравнение (4) можно записать в виде уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho v + \frac{\partial}{\partial x}\rho w = 0, \tag{8}$$

а уравнения (7) можно переписать так:

$$vv_x + wv_y = 2\nu\frac{1}{\rho}\nabla(\rho\nabla v), \quad vw_x + ww_y = 2\nu\frac{1}{\rho}\nabla(\rho\nabla w).$$

В этом случае кинематическая вязкость жидкости равна удвоенной исходной вязкости.

3. Подстановки второго уровня

Полученная интерпретация уравнений (5) оказывается не единственной. Эти уравнения обладают внутренней скрытой структурой второго уровня, которая выявляется лишь при специальном представлении функций A и B. Рассмотрим следующую замену переменных:

$$A = u(x, y)\cos\varphi(x, y), \quad B = u(x, y)\sin\varphi(x, y), \quad A^2 + B^2 = u^2. \tag{9}$$

Подставляя эти соотношения в уравнения (2) и (5), получаем

$$(u_x + u\varphi_y)\sin\varphi - (u_y - u\varphi_x)\cos\varphi = 0,$$

$$(u_x + u\varphi_y)\cos\varphi + (u_y - u\varphi_x)\sin\varphi + u^2 = 0.$$

Рассматривая эту систему как систему алгебраических уравнений относительно $p = u_x + u\varphi_y$ и $q = u_y - u\varphi_x$, находим их решение:

$$\theta_x + \varphi_y = -u\cos\varphi = -A, \tag{10}$$

$$\theta_y - \varphi_x = -u\sin\varphi = -B. \tag{11}$$

Здесь $\theta = \ln u$. Из этой системы перекрестным дифференцированием, используя (5), получаем следующие уравнения:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \tag{12}$$

$$\theta_{xx} + \theta_{yy} = u^2 = e^{2\theta}. \tag{13}$$

Первое из этих уравнений есть уравнение Лапласа, а второе – уравнение Лиувилля! Эти уравнения и отражают скрытую динамическую симметрию уравнений (5), которая заключается в наличии прямых обобщенных подстановок Коула – Хопфа для решений уравнений (12) и (13), связывающих их с решениями уравнения (4):

$$\theta = \ln u = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{\partial \ln T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial y}\right)^2\right), \tag{14}$$

$$\varphi = \left(\frac{T_y}{T_x}\right). \tag{15}$$

Эти подстановки будем называть подстановками второго уровня.

Динамическая структура уравнений не исчерпывается подстановками (14) и (15) , которые можно назвать простейшими. В класс таких простейших подстановок можно включить еще и подстановку, которая получается следующим образом. Представим функцию θ в следующем виде:

$$\theta = \psi - \ln T, \tag{16}$$

где

$$\psi = \frac{1}{2}\ln\left((T_x)^2 + (T_y)^2\right). \tag{17}$$

Тогда, используя (4) , находим

$$\Delta\theta - e^{2\theta} = \Delta\psi - \Delta\ln T - e^{2\theta} = \Delta\psi + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial y}\right)^2 - e^{2\theta} = \Delta\psi = 0.$$

Здесь использовано тождество

$$\Delta \ln T = \frac{\Delta T}{T} - \left(\frac{T_x}{T}\right)^2 - \left(\frac{T_y}{T}\right)^2 = -e^{2\theta}.$$

В результате находим

$$\Delta\psi = 0. \tag{18}$$

Это позволяет рассматривать в качестве подстановки Коула – Хопфа и соотношение (17), которое связывает две гармонические функции T и ψ.

Утверждение 1. Обобщенная подстановка Коула – Хопфа (14) преобразует гармоническую функцию $T(x, y)$ в решение уравнения Лиувилля (13), а подстановки (15) и (17) преобразуют гармоническую функцию T в гармонические функции φ и ψ.

4. Рекуррентные цепочки подстановок

Совокупность простейших подстановок второго уровня (14)–(17) генерирует бесконечное множество более сложных подстановок, которые можно получить, опираясь на тот факт, что функции φ и ψ являются гармоническими функциями, как и исходная функция T. Поэтому эти функции могут быть использованы в качестве источника тех же подстановок (14)–(17). Эту процедуру можно повторять неограниченное число раз. В результате мы получаем бесконечную цепочку преобразований решений уравнения Лапласа в новые решения уравнений Лапласа и уравнение Лиувилля, которые вычисляются рекуррентно по следующим правилам:

$$\theta^{(n+1)}[\eta] = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{\partial \ln \eta^{(n)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln \eta^{(n)}}{\partial y}\right)^2\right),$$

$$\varphi^{(n+1)}[\eta] = \left(\frac{\eta_y^{(n)}}{\eta_x^{(n)}}\right), \tag{19}$$

$$\psi^{(n+1)}[\eta] = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{\partial \eta^{(n)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta^{(n)}}{\partial y}\right)^2\right),\ n = 0,1,\ldots,$$

где $\eta^{[n]}$ означает либо $\varphi^{[n]}$, либо $\psi^{[n]}$ в зависимости от выбора источника очередного шага рекуррентного процесса. В качестве начальных условий следует использовать любое решение уравнение Лапласа:

$$\varphi^{(0)} = \psi^{(0)} = T,\ \varphi^{(1)} = \varphi,\ \ \theta^{(1)} = \theta.\ \ \psi^{(1)} = \psi,$$

в частности, функции

$$\theta^{(2)}[\varphi] = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{\partial \ln \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln \varphi}{\partial y}\right)^2\right), \tag{20}$$

$$\varphi^{(2)}[\varphi] = \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_x}\right),\ \ \psi^{(2)}[\varphi] = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right) \tag{21}$$

вновь являются решениями уравнения Лиувилля ($\theta^{(2)}[\varphi]$) и Лапласа ($\varphi^{(2)}[\psi],\ \ \psi^{(2)}[\varphi]$) соответственно; аналогично:

$$\theta^{(2)}[\psi] = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{\partial \ln \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln \psi}{\partial y}\right)^2\right), \tag{22}$$

$$\phi^{(2)}[\psi] = \left(\frac{\psi_y}{\psi_x}\right),\ \ \psi^{(2)}[\psi] = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right), \tag{23}$$

также являются решениями уравнения Лиувилля ($\theta^{(2)}[\psi]$) и Лапласа ($\varphi^{(2)}[\psi], \psi^{(2)}[\psi]$). Общими свойствами функции для каждого шага рекуррентного процесса являются следующие соотношения:

$$\theta^{(n+1)}[\eta] = \psi^{(n+1)}[\eta] - \ln\varphi^{(n)}[\eta], \quad \Delta\ln\eta^{(n)} = -e^{2\theta^{(n+1)}[\eta]}. \tag{24}$$

Степень сложности каждого элемента рассматриваемой цепочки отображений возрастает с номером шага рекуррентного процесса и определяется тем, как функции на этом шаге связаны с начальной функцией T этого процесса. В частности, на втором шаге рекуррентного процесса функции $\varphi^{(2)}, \psi^{(2)}, \theta^{(2)}$ связаны с T следующим образом:

$$\varphi^{(2)}[\varphi] = \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_x}\right) = \left(\frac{T_{yy}T_x - T_{xy}T_y}{T_{yx}T_x - T_{xx}T_y}\right),$$

$$\psi^{(2)}[\varphi] = \frac{1}{2}\ln\left[(T_{yy}T_x - T_{xy}T_y)^2 + (T_{yx}T_x - T_{xx}T_y)^2\right] - \ln\left[(T_x)^2 + (T_y)^2\right],$$

$$\theta^{(2)}[\varphi] = \frac{1}{2}\ln\left[(T_{yy}T_x - T_{xy}T_y)^2 + (T_{yx}T_x - T_{xx}T_y)^2\right] - \ln\left[(T_x)^2 + (T_y)^2\right] - \ln\left(\frac{T_y}{T_x}\right).$$

В результате имеем следующее утверждение.

Утверждение 2. Для каждого шага n цепочки преобразований (19) функции $\varphi^{(n)}[\eta], \psi^{(n)}[\eta]$ и $\theta^{(n)}[\eta]$ при любом выборе гармонической функции-источника η эти функции являются решениями уравнений Лапласа и Лиувилля соответственно. Сами эти функции выражаются через производных функции T порядка не выше n.

Заметим, что в связи с существованием рекуррентных цепочек преобразований (19) представляет интерес анализ условий, при которых в результате конечного числа шагов достигается исходная гармоническая функция. Важным здесь является то, что при выполнении таких условий гармонические функции будут являться решениями некоторых нелинейных уравнений. Для случая бесконечного числа шагов рекуррентного процесса интерес представляет ответ на вопрос о существовании предельных гармонических функций, к которым стремятся соответствующие функции $\varphi^{[n]}, \psi^{[n]}$ при $n \to \infty$.

5. Неоднородное уравнение Лиувилля

Построенные решения позволяют получить в обобщенной форме результаты, которые ранее были получены в работах [7, 8]. Рассмотрим функцию $\chi = \theta + \alpha\ln T$. Используя свойства функций θ и T, находим, что функция χ удовлетворяет следующему соотношению:

$$\Delta\chi = \Delta\theta + \alpha\Delta\ln T = e^{2\theta} - \alpha e^{2\theta} = (1-\alpha)e^{\chi - \alpha\ln T} = (1-\alpha)T^{-2\alpha}e^{2\chi},$$

отсюда следует, что функция χ удовлетворяет неоднородному уравнению Лиувилля

$$\Delta\chi = (1-\alpha)T^{-2\alpha}e^{\chi},$$

в котором функция T является гармонической функцией. Этот результат можно обобщить, если воспользоваться соотношениями (24). Для каждого шага цепочки рассмотрим функцию

$$\chi^{(n+1)}[\eta] = \theta^{(n+1)}[\eta] + \alpha \ln \eta^{(n)}.$$

Тогда, используя (24), прямыми вычислениями находим, что функция $\chi^{(n+1)}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\chi^{(n+1)}[\eta] = (1-\alpha)[\eta^{(n)}]^{-2\alpha} e^{2\chi^{(n+1)}[\eta]},$$

в частности

$$\Delta\chi_1^{(2)} = (1-\alpha)\left(\left(\frac{T_y}{T_x}\right)\right)^{-2\alpha} e^{2\chi_1^{(2)}},\quad \Delta\chi_2^{(2)} = (1-\alpha)\left(\ln\left((T_x)^2+(T_y)^2\right)\right)^{-2\alpha} e^{2\chi_2^{(2)}}.$$

При $\alpha = -1/2$ в правую часть неоднородного уравнения Лиувилля в качестве неоднородного множителя входит соответствующая гармоническая функция, что фактически эквивалентно нелинейному автономному уравнению следующего вида:

$$\Delta\left[e^{-2\chi^{(n)}}\Delta\chi^{(n)}\right] = 0.$$

Этот результат имеет следующее обобщение. Воспользуемся тождеством

$$\Delta F(T) = F'(T)\Delta T + F''((T_x)^2 + (T_y)^2) = T^2 F''(T) e^{2\theta}, \tag{25}$$

которое выполняется для любой гармонической функции T.

Рассмотрим функцию

$$\xi = \theta + F(T).$$

Тогда, используя тождество (25), получаем

$$\Delta\xi = e^{2\xi}(1 + T^2F''(T))e^{-2F(T)}.$$

Аналогичное преобразование можно построить для каждого шага цепочки (19).

Утверждение 3. Для каждого шага n цепочки (19) функция

$$\xi^{(n)}[\eta] = \theta^{(n)}[\eta] + F(\eta) \tag{26}$$

удовлетворяет неоднородному уравнению Лиувилля:

$$\Delta\xi^{(n)}[\eta] = e^{\xi^{(n)}[\eta]}(1+\eta^2F''(\eta))e^{-2F(\eta)}.$$

Следствие. В случае, если функция $F(\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(1+\eta^2 F''(\eta)\right)e^{-2F(\eta)} = C,$$

где C – отличная от нуля постоянная, соотношение (26) является преобразованием решений уравнений Лиувилля в себя, а в случае $C = 0$ – преобразованием решений уравнения Лиувилля в уравнение Лапласа.

6. Подстановки, связанные с уравнением Гельмгольца

Найденная богатая структура преобразований уравнений Лапласа в себя и в уравнение Лиувилля, связанная с подстановками второго уровня, в отличие от подстановок первого уровня, которые приводят к уравнениями Навье – Стокса, не воспроизводится для других уравнений даже при незначительных усложнениях их структуры по сравнению со структурой уравнения Лапласа. Рассмотрим в качестве такого обобщения замыкающее уравнение Гельмгольца:

$$T_{xx} + T_{yy} = \gamma^2 T, \tag{27}$$

где γ – постоянная.

Замыкающее уравнение в виде коэффициентов A, B теперь будет иметь вид

$$A_x + B_x + A^2 + B^2 = \gamma^2.$$

Нетрудно проверить, что появление постоянной величины γ^2 в правой части уравнения (27) не меняет структуру уравнений (7) при использовании тех же обозначений (6). Однако, в отличие от случая уравнения Лапласа, уравнение (27) невозможно простым образом представить в виде закона сохранения, эквивалентного по форме уравнению неразрывности (8). Возможно, именно это предопределяет отсутствие простой внутренней структуры уравнений для функций A, B в этом случае.

По аналогии с предыдущим случаем ищем решение для A, B в том же виде (9) . В этом случае имеем

$$(u_x + u\varphi_y)\sin\varphi - (u_y - u\varphi_x)\cos\varphi = 0,$$

$$(u_x + u\varphi_y)\cos\varphi + (u_y - u\varphi_x)\sin\varphi + u^2 - \gamma^2 = 0.$$

Полагая

$$u_x + u\varphi_y = R^2\cos\varphi,\ \ u_y - u\varphi_x = R^2\sin\varphi, \tag{28}$$

приходим к следующему соотношению:

$$R^2 + u^2 = \gamma^2.$$

Отсюда следует, что существует такая функция χ, что

$$R = \gamma\cos\chi,\ \ u = \gamma\sin\chi.$$

Это означает, что вещественные решения для u и R, соответствующие (9), являются ограниченными: $|R|<\gamma$, $|u|<\gamma$.

Исключая из (28) функцию R, находим

$$\frac{1}{u}u_x+\varphi_y=-\left(u-\frac{\gamma^2}{u}\right)\cos\varphi,\ \ \frac{1}{u}u_y-\varphi_x=-\left(u-\frac{\gamma^2}{u}\right)\sin\varphi. \tag{29}$$

Производя дифференцирование соотношений (29) и некоторые дополнительные преобразования, получаем

$$\Delta\theta-e^{2\theta}+\gamma^4e^{-2\theta}=-2\gamma^2e^{-\theta}\left(\varphi_x\sin\varphi-\varphi_y\cos\varphi\right), \tag{30}$$

$$\Delta\varphi=-2\gamma^2e^{-\theta}\left(\varphi_y\sin\varphi+\varphi_x\cos\varphi\right). \tag{31}$$

Здесь, как и раньше, $\theta=\ln u$. Из (29) можно получить еще одно относительно простое уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2\varphi_x}{u^2-\gamma^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2\varphi_y}{u^2-\gamma^2}\right)=0.$$

Уравнение (31) позволяет разделить переменные:

$$\theta=\ln(2\gamma^2)+\ln\left(-\varphi_y\sin\varphi-\varphi_x\cos\varphi\right)-\ln\Delta\varphi.$$

Подставляя это соотношение в (30) и исключая из него θ, приходим к одному уравнению для φ, которое имеет очень громоздкий вид. Таким образом, подстановки второго уровня, хотя и существуют для уравнения Гельмгольца, но не содержат столь же богатого многообразия структур, как в случае с уравнением Лапласа.

Заметим, что (30) имеет вид неоднородного уравнения Синус – Гордон (SG). Однородное уравнение SG интегрируется методом обратной задачи [9]. Поэтому возникает вопрос о возможности получать решения уравнения SG с помощью некоторых дополнительных условий на выбор решений исходного уравнения Гельмгольца. Однако анализ таких условий выходит за рамки данной работы.

7. Многомерные системы

Предложенный подход можно распространить достаточно просто и на многомерные системы, связанные с уравнениями Лапласа, Д'Аламбера и теплопроводности. Поскольку, как и выше, все результаты, касающиеся уравнений, связанных с уравнением Лапласа, легко переносятся на случай уравнения Д'Аламбера, то мы не будем специально выписывать их в данной работе. Рассмотрим применение данного метода сразу в размерности $n+1$. В этом случае базовая система уравнений имеет следующий вид:

$$T_t=WT,\ \ T_{,\alpha}=A_\alpha T,\ \ \alpha=1,\ldots,n. \tag{32}$$

Эта система представляет собой подстановки первого уровня в многомерном случае. Здесь и далее используются обозначения:

$$F_{,\alpha} = \frac{\partial F}{\partial x_\alpha},\ F_{,t} = \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Условиями совместности этой системы являются соотношения:

$$A_{\alpha,\beta} = A_{\beta,\alpha},\ W_{,\alpha} = A_{\alpha,t}. \tag{33}$$

В качестве замыкающего уравнения рассмотрим уравнение теплопроводности:

$$T_t = \nu \Delta T, \tag{34}$$

здесь

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}.$$

Это уравнение эквивалентно следующему замыкающему соотношению:

$$\frac{1}{\nu} W = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(A_{\alpha,\alpha} + A_\alpha^2 \right). \tag{35}$$

Из последнего соотношения простым дифференцированием находим

$$W_{,\alpha} = A_{\alpha,t} = \nu \sum_{\beta=1}^{n} (A_{\beta,\beta\alpha} + 2 A_\alpha A_{\alpha,\beta}).$$

Используя условия совместности, из этого соотношения для каждого значения индекса β получаем

$$\frac{1}{\nu} A_{\alpha_t} = \sum_{\beta=1}^{n} (A_{\alpha,\beta\beta} + 2 A_\alpha A_{\beta,\alpha}). \tag{36}$$

Если ввести обозначения $v_\alpha = -2\nu A_\alpha$, то последнее уравнение приводится к уравнению Навье – Стокса для потенциального потока жидкости с полем скорости $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и нулевой силой Архимеда:

$$v_{\alpha,t} + \sum_{\beta=1}^{n} v_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = \nu \Delta v_\alpha.$$

Это уравнение можно назвать многомерным уравнением Бюргерса.

Вводя обозначения $u_\alpha = -\nu A_\alpha$, уравнение (36) приводим к следующему виду:

$$u_{\alpha,t} + \sum_{\beta=1}^{n} u_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = \nu \Delta u_\alpha - \frac{\partial p}{\partial x_\alpha}, \tag{37}$$

где

$$p = \frac{\nu}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} A_{\alpha}^{2} + p_0, \tag{38}$$

здесь p_0 – произвольная постоянная.

Уравнение (37) интерпретируется как уравнения Навье – Стокса для потенциального потока жидкости с полем скорости $u = v/2$ и давлением p. Однако для полноты такой интерпретации необходимо указать уравнение сохранения массы, которое должно иметь вид уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\rho u^{\alpha} = 0. \tag{39}$$

К такому виду приводится исходное уравнение (34). Действительно,

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \nu\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left[T\frac{\partial \ln T}{\partial x_{\alpha}}\right] = 0.$$

Используя обозначения для скорости и полагая $\rho = T$, приходим к уравнению (39). Таким образом, любое решение уравнения (34) дает решение уравнений Навье – Стокса с давлением p и плотностью ρ, однако требуется определенное уточнение этих уравнений.

Поскольку в систему уравнений включена непостоянная плотность среды, то это требует определенного пересмотра уравнения Навье – Стокса. В реальности в запись правой части уравнения (37) при непостоянной плотности среды должен входить множитель ρ^{-1}. Это означает, что уравнение (37) необходимо модифицировать. Это можно сделать, учитывая тот факт, что в запись слагаемого, ответственного за вязкую диссипацию в уравнении (37), входит динамическая вязкость, пропорциональная плотности жидкости, которая в нашем случае $\rho = T$. Следовательно, это слагаемое должно иметь следующий вид:

$$F_{\alpha}^{(\nu)} = \frac{\nu}{\rho}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_{\beta}}\left[\rho\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}\right] = -\frac{\nu^2}{T}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_{\beta}}\left[T\frac{\partial^2 \ln T}{\partial x_{\beta}\partial x_{\alpha}}\right] = -\sum_{\beta=1}^{n}u_{\beta}\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \nu\sum_{\beta=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}^2}\right].$$

Уравнение (37) теперь можно переписать следующим образом:

$$u_{\alpha,t} + \sum_{\beta=1}^{n}u_{\beta}\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} = \frac{\nu}{\rho}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_{\beta}}\left[\rho\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}\right]. \tag{40}$$

Это уравнение не содержит силы Архимеда (градиента давления), т.е. относится к динамике жидкости с постоянным по пространству давлением.

Отметим, что если в качестве исходного уравнения в размерности n использовать уравнение Лапласа (Д'Аламбера), то совершенно аналогичные выкладки приводят к стационарному уравнению Навье – Стокса для потенциальных течений. Поэтому специально эти результаты здесь не приводятся.

8. Уравнение переноса тепла

Единственным недостатком полученного решения является неясность с уравнением состояния $p = p(\rho, \Theta)$ для полученного класса решений. Здесь Θ – температура жидкости (газа). Температура системы должна удовлетворять уравнению теплопроводности. Для получения такого уравнения продифференцируем уравнение (35) по t и воспользуемся соотношениями совместности (2). В результате имеем

$$\frac{1}{\nu} W_t = \sum_{\beta=1}^{n} (A_{\beta,\beta,t} + 2A_\beta A_{\beta,t}) = \sum_{\beta=1}^{n} (W_{,\beta,\beta} + 2A_\beta W_{,\beta}).$$

Если положить, что температура Θ среды связана с W соотношением

$$\Theta = \gamma W + \Theta_0 = \gamma \frac{\partial \ln T}{\partial t} + \Theta_0,$$

то приходим к уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \Theta}{\partial x_\alpha} = \nu \Delta \Theta + \gamma \frac{\partial p}{\partial t}$$

с источником, равным $\gamma \dot{p}$.

Это же уравнение можно записать в форме уравнения без источника:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \Theta}{\partial x_\alpha} = \frac{\nu}{\rho} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[\rho \frac{\partial \Theta}{\partial x_\beta} \right]. \tag{41}$$

9. Подстановки второго уровня в многомерном случае

В связи с тем, что для уравнения Лапласа в размерности $n = 2$ существуют подстановки второго уровня, преобразующих гармонические функции в гармонические и в решения уравнения Лиувилля, интерес представляет проверка существования аналогичных подстановок второго уровня в многомерном случае, в том числе и для уравнения теплопроводности. Для того чтобы получить аналог соотношений внутренней структуры в размерности $n+1$, рассмотрим следующее представление функций A_α:

$$A_\alpha = u(x,t) N_\alpha(x,t), \tag{42}$$

где векторное поле $N = \{N_1, N_2, \ldots, N_n\}$ имеет везде длину, равную 1:

$$\sum_{\alpha}^{n} N_\alpha^2 = 1.$$

В результате имеем

$$\sum_{\alpha}^{n} A_\alpha^2 = u^2.$$

Введем обозначение

$$\theta_\alpha = \frac{\partial \ln u}{\partial x_\alpha}, \quad \theta = \ln u.$$

Тогда уравнение (35) и совокупность условий совместности (33) приводят к следующей системе соотношений:

$$\theta_\alpha N_\beta - \theta_\beta N_\alpha = \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial N_\beta}{\partial x_\alpha}, \quad \frac{1}{\nu}\frac{\partial W}{\partial x_\alpha} = u_t N_\alpha + u\frac{\partial N_\alpha}{\partial t},$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \theta_\alpha N_\alpha + \mathrm{d}ivN + u - \frac{W}{\nu u} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n.$$

Умножая первое из этих соотношений на N_β и сворачивая результат по индексу β, находим

$$N_\alpha \left(u + \mathrm{d}ivN - \frac{1}{\nu} We^{-\theta} \right) + \theta_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} N_\beta \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_\beta}. \tag{43}$$

Здесь и далее

$$\mathrm{div}\, N = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_\alpha}.$$

Беря дивергенцию от соотношения (43), приходим к следующему уравнению для θ:

$$\Delta\theta - e^{2\theta} - \theta_t + \frac{1}{\nu^2} W^2 e^{-2\theta} - \frac{2}{\nu} We^{-\theta} \mathrm{div}\, N = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial N_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_\beta} - [\mathrm{div}\, N]^2. \tag{44}$$

Это уравнение можно рассматривать как неоднородное нелинейное уравнение теплопроводности.

Из полученных соотношений можно получить соответствующие уравнения для случая, когда исходным уравнением является уравнение Лапласа. Для этого необходимо в уравнениях положить $W = \mathrm{const}$ и потребовать независимость функций от t. В этом случае уравнение (44) переходит в неоднородное многомерное уравнение SG:

$$\Delta\theta - e^{2\theta} + \frac{1}{\nu^2} W^2 e^{-2\theta} - \frac{2}{\nu} We^{-\theta} \mathrm{div}\, N = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial N_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_\beta} - [\mathrm{div}\, N]^2. \tag{45}$$

Из анализа этих уравнений следует, что в решениях многомерных уравнений Лапласа, теплопроводности и Гельмгольца отсутствует столь же богатая совокупность подстановок второго уровня, которая наблюдается в случае замыкающего уравнения в форме двумерного уравнения Лапласа (Д'Аламбера). Однако универсальность неоднородной части полученных уравнений позволяет поставить общий вопрос о существовании условий, при которых соответствующие неоднородные уравнения Лиувилля, теплопроводности и SG сводятся к однородным.

Отметим, что из полученных соотношений можно получить соответствующие уравнения для случая, когда исходным уравнением является уравнение Лапласа. Для этого необходимо в уравнениях положить $W=0$ и опять потребовать независимость функций от t. В этом случае уравнение (44) примет более простой вид:

$$\Delta\theta - e^{2\theta} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial N_\beta}{\partial x_\alpha}\frac{\partial N_\alpha}{\partial x_\beta} - [\operatorname{div} N]^2. \tag{46}$$

Это уравнение имеет форму неоднородного многомерного уравнения Лиувилля.

В работах [10–12] были рассмотрены методы построения точных решений уравнения Лиувилля в многомерных пространствах. Уравнение (46) в сочетании с информацией, полученной в работах [10–12], дает дополнительную информацию о некоторых свойствах полей единичной длины на многомерных пространствах. Действительно, пусть функция θ удовлетворяет уравнению Лиувилля:

$$\Delta\theta - e^{2\theta} = 0.$$

Отсюда следует, что единичные поля N, заданные соотношениями

$$N_\alpha = A_\alpha e^{-\theta} = \frac{T_{,\alpha}}{T} e^{-\theta},$$

где T удовлетворяет уравнению Лапласа, удовлетворяют уравнению

$$(\operatorname{div} N)^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial N_\beta}{\partial x_\alpha}\frac{\partial N_\alpha}{\partial x_\beta}.$$

Этот дополнительный результат требует отдельного анализа, поскольку может оказаться полезным в различных прикладных задачах.

Заключение

В работе на основе метода функциональных подстановок типа Коула – Хопфа выведены нелинейные уравнения, связанные с замыкающими уравнениями в форме Лапласа (Д’Аламбера), теплопроводности и Гельмгольца. Эти нелинейные уравнения имеют вид уравнений потенциальных течений вязкой идеальной сжимаемой жидкости, что обобщает результат Коула – Хопфа в отношении одномерного уравнения Бюргерса. Этот результат получен в данной работе для произвольной размерности координатного пространства. Важным обстоятельством, найденным в работе, является наличие дополнительной функциональной структуры решений, которая выражается в наличии универсального представления полученных нелинейных уравнений в форме неоднородных уравнений Лиувилля, теплопроводности и уравнения SG. Наиболее существенным результатом в отношении дополнительной функциональной структуры является наличие бесконечных рекуррентных цепочек отображений двумерных гармонических функций в другие гармонические функции и решения двумерного уравнения Лиувилля. Наличие бесконечного многообразия подстановок типа Коула – Хопфа для двумерного уравнения Лапласа (или Д'Аламбера) выделяет это уравнение среди других типов уравнений. Как показано в работе, такой структурой не обладают решения уравнений теплопроводности, Гельмгольца и уравнения Лапласа в размерностях больших 2. Однако из универсальности формы нелинейных уравнений в размерности $n > 2$ можно предположить, что, возможно, существуют условия, при которых можно в явном виде получать решения многомерных уравнений Лиувилля или SG.

Список литературы

1. **Журавлев, В. М.** Новый подход к построению нелинейных эволюционных уравнений, линеаризуемых с помощью подстановок типа Коула – Хопфа / В. М. Журавлев, А. В. Никитин // Нелинейный мир. – 2007. – Т. 5, № 9. – С. 603–611.
2. **Журавлев, В. М.** Нелинейные уравнения, линеаризуемые с помощью обобщенных подстановок Коула – Хопфа и точно интегрируемые модели одномерных течений сжимаемой жидкости / В. М. Журавлев, Д. А. Зиновьев // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2008. – Т. 87, № 5. – С. 314–318.
3. **Журавлев, В. М.** Метод обобщенных подстановок Коула – Хопфа в размерности 1+2 и интегрируемые модели двумерных течений сжимаемой жидкости / В. М. Журавлев, Д. А. Зиновьев // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2008. – Т. 88, № 3. – С. 194–197.
4. **Журавлев, В. М.** Метод обобщенных подстановок Коула – Хопфа и новые примеры линеаризуемых нелинейных эволюционных уравнений / В. М. Журавлев // Теоретическая и математическая физика. – 2009. – Т. 159, № 1. – С. 58–71.
5. **Zhuravlev, V. M.** The Application of Generalized Cole-Hopf Substitutions in Compressible-Fluid Hydrodynamics / V. M. Zhuravlev, D. A. Zinov'ev // Physics of Wave Phenomena. – 2010. – Vol. 18, № 4. – P. 245–250.
6. **Zhuravlev, V. M.** Nonlinear Waves in Self-Gravitating Compressible Fluid and Generalized Cole-Hopf Substitutions / V. M. Zhuravlev, D. A. Zinov'ev // Physics of Wave Phenomena. – 2011. – Vol. 19, № 4. – P. 313–317.
7. **Семенов, Э. И.** О новых точных решения неавтономного уравнения Лиувилля / Э. И. Семенов // Сибирский математический журнал. – 2008. – Т. 48, № 1. – С. 207–217.
8. **Семенов, Э. И.** Свойства уравнения быстрой диффузии и его многомерные точные решения / Э. И. Семенов // Сибирский математический журнал. – 2003. – Т. 44, № 4. – С. 863–869.
9. **Додд, Р.** Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррио. – М. : Мир, 1988. – С. 694.
10. **Журавлев, В. М.** Точные решения уравнений Лиувилля в многомерных пространствах / В. М. Журавлев // Теоретическая и математическая физика. – 1999. – Т. 120, № 1. – С. 3–19.
11. **Журавлев, В. М.** Модели автоволновых процессов в средах с диффузией и уравнения типа Лиувилля / В. М. Журавлев // Известия вузов. Сер.: Прикладная нелинейная динамика. – 2001. – Т. 9, № 6. – С. 115–128.
12. **Журавлев, В. М.** Нелинейные волны в многокомпонентных системах с дисперсией и диффузией / В. М. Журавлев. – Ульяновск : Изд-во УлГУ, 2001. – 252 с.

References

1. Zhuravlev V. M., Nikitin A. V. *Nelineynyy mir* [The nonlinear world]. 2007, vol. 5, no. 9, pp. 603–611.
2. Zhuravlev V. M., Zinov'ev D. A. *Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki* [Letters to the Journal of experimental and theoretical physics]. 2008, vol. 87, no. 5, pp. 314–318.
3. Zhuravlev V. M.,. Zinov'ev D. A *Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noy i teore-ticheskoy fiziki* [Letters to the Journal of experimental and theoretical physics]. 2008, vol. 88, no. 3, pp. 194–197.
4. Zhuravlev V. M. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2009, vol. 159, no. 1, pp. 58–71.
5. Zhuravlev V. M., Zinov’ev D. A. *Physics of Wave Phenomena*. 2010, vol. 18, no. 4, pp. 245–250.
6. Zhuravlev V. M., Zinov’ev D. A. *Physics of Wave Phenomena*. 2011, vol. 19, no. 4, pp. 313–317.
7. Semenov E. I. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian mathematical journal]. 2008, vol. 48, no. 1, pp. 207–217.
8. Semenov E. I. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian mathematical journal]. 2003, vol. 44, no. 4, pp. 863–869.
9. Dodd R., Eylbek Dzh., Gibbon Dzh., Morrio Kh. *Solitony i nelineynye volnovye uravneniya* [Solitons and nonlinear wave equations]. Moscow: Mir, 1988, p. 694.
10. Zhuravlev V. M. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 1999, vol. 120, no. 1, pp. 3–19.
11. Zhuravlev V. M. *Izvestiya vuzov. Ser.: Prikladnaya nelineynaya dinamika* [University proceedings. Series: Applied nonlinear dynamics]. 2001, vol. 9, no. 6, pp. 115–128.
12. Zhuravlev V. M. *Nelineynye volny v mnogokomponentnykh sistemakh s dis-persiey i diffuziey* [Nonlinear waves in multidimensional systems with dispersion and diffusion]. Ulyanovsk: Izd-vo UlGU, 2001, 252 p.

Журавлев Виктор Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической физики, Ульяновский государственный университет (Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42)

Zhuravlev Viktor Mikhaylovich
Doctor of physical and mathematical sciences, sub-department of theoretical physics, Ulyanovsk State University (42 Lva Tolstogo street, Ulyanovsk, Russia)

E-mail: zhvictorm@gmail.ru

УДК 51-71, 532.51, 538.93

Журавлев, В. М.

О многомерных нелинейных уравнениях, связанных с уравнениями Лапласа и теплопроводности функциональными подстановками / В. М. Журавлев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 4 (40). – С. 84–101. DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-8